

Opción A

Ejercicio 1 opción A, Suplente Junio 2019 (modelo 2)

[2'5 puntos] Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos(x) - e^{-2x} - 2x}{\operatorname{sen}^2(x)} \right)$.

Solución

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos(x) - e^{-2x} - 2x}{\operatorname{sen}^2(x)} \right) = \frac{\cos(0) - e^0 - 2(0)}{\operatorname{sen}^2(0)} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$

Le aplicamos la regla de L'Hôpital (L'H). (Si "f" y "g" son funciones continuas en $[a - \delta, a + \delta]$, derivables en $(a - \delta, a + \delta)$, verificando que $f(a) = g(a) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, entonces si existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$. La regla se puede reiterar, y también es válida si tenemos ∞/∞ , y si $x \rightarrow \infty$, con lo

cual tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos(x) - e^{-2x} - 2x}{\operatorname{sen}^2(x)} \right) &= \left\{ \frac{0}{0}; L'H \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-\operatorname{sen}(x) - e^{-2x} \cdot (-2) - 2}{2 \cdot \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x)} \right) = \{ \text{Opero} \} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-\operatorname{sen}(x) + 2e^{-2x} - 2}{2 \cdot \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x)} \right) \\ &= \left\{ \frac{0+2-2}{2 \cdot \operatorname{sen}(0) \cdot \cos(0)} = \frac{0}{0}; L'H \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-\cos(x) + 2e^{-2x} \cdot (-2)}{2 \cdot \cos(x) \cdot \cos(x) + 2 \cdot \operatorname{sen}(x) \cdot (-\operatorname{sen}(x))} \right) = \frac{-\cos(0) - 4 \cdot e^0}{2 \cdot \cos(0) \cdot \cos(0) - 2 \cdot \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}(x)} \\ &= \frac{-1 - 4}{2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 0} = \frac{-5}{2} \end{aligned}$$

Ejercicio 2 opción A, Suplente Junio 2019 (modelo 2)

[2'5 puntos] Calcula $\int \ln \left(\frac{x^2+1}{x} \right) dx$ (ln denota la función logaritmo neperiano)

Solución

$$\begin{aligned} I &= \int \ln \left(\frac{x^2+1}{x} \right) dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln \left(\frac{x^2+1}{x} \right) \Rightarrow du = \frac{1}{\frac{x^2+1}{x}} \cdot \frac{2x \cdot (x) - (x^2+1) \cdot 1}{x^2} dx = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{(x^2+1) \cdot x} dx = \frac{x^2 - 1}{(x^2+1) \cdot x} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x \end{array} \right\} \\ &= \ln \left(\frac{x^2+1}{x} \right) \cdot x - \int x \cdot \frac{x^2 - 1}{(x^2+1) \cdot x} dx = x \cdot \ln \left(\frac{x^2+1}{x} \right) - \int \frac{x^2 - 1}{x^2+1} dx = x \cdot \ln \left(\frac{x^2+1}{x} \right) - \int \frac{x^2+1 - 1 - 1}{x^2+1} dx = \\ &= x \cdot \ln \left(\frac{x^2+1}{x} \right) - \int \left(1 - \frac{2}{x^2+1} \right) dx = x \cdot \ln \left(\frac{x^2+1}{x} \right) - \int 1 dx + 2 \int \frac{dx}{x^2+1} = x \cdot \ln \left(\frac{x^2+1}{x} \right) - x + 2 \cdot \operatorname{artg}(x) + K \end{aligned}$$

Ejercicio 3 opción A, Suplente Junio 2019 (modelo 2)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m-1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) [1 punto] Calcula los valores de m para los cuales A tiene inversa.

b) [1'25 punto] Para "m = 2", encuentra la matriz X que cumple $AX - BB^t = I$, siendo B^t la matriz traspuesta de B e I la matriz identidad de orden 3.

Solución

a)

Calcula los valores de m para los cuales A tiene inversa.

La matriz A tienen inversa si $\det(A) = |A| \neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ m-1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} F_1 - F_3 \\ \\ \text{columna} \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & m-1 & 0 \\ m-1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \end{array} = 1 \cdot [0 - (m-1) \cdot (m-1)] = -(m-1)^2.$$

Luego $|A| \neq 0$ si $(m-1) \neq 0$, es decir **A tiene inversa si $m \neq 1$** .

b)

Para "m = 2", encuentra la matriz X que cumple $AX - BB^t = I$, siendo B^t la matriz traspuesta de B e I la matriz identidad de orden 3.

Sabemos que para m = 2, la matriz A tiene inversa, por tanto de la ecuación matricial $AX - BB^t = I$ tenemos $AX = I + BB^t$. Multiplicando la expresión $AX = I + BB^t$, por la izquierda por A^{-1} tenemos $A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot (I + BB^t)$, de donde $\rightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot (I + BB^t) \rightarrow X = A^{-1} \cdot (I + BB^t)$.

Sabemos que $A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)^t}{|A|}$. Teniendo en cuenta el cálculo anterior de $\det(A)$ tenemos $|A| = -(2-1)^2 = -1$,

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)^t}{|A|} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot (I + BB^t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4 opción A, Suplente Junio 2019 (modelo 2)

Considera el punto A y los planos $\pi_1 \equiv x + y + z = 0$ y $\pi_2 \equiv x - y + z = 0$.

a) [1'25 puntos] Calcula la recta pasa por A y es paralela a π_1 y π_2 .

b) [1'25 puntos] Calcula los puntos de la recta $s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{2}$ que equidistan de π_1 y π_2 .

Solución

a)

Calcula la recta pasa por A y es paralela a π_1 y π_2 .

Si la recta es paralela a los planos π_1 y π_2 , un vector director de la recta es uno paralelo a la vez a los planos π_1 y π_2 , es decir $u = n_1 \times n_2$, siendo (x) el producto vectorial n_1 y n_2 los vectores normales de π_1 y π_2 .

$$n_1 = (1, 1, 1), n_2 = (1, -1, 1), u = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = i(2) - j(0) + k(-2) = (2, 0, -2) \text{ y la recta pedida es}$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 1 \\ z = -2\lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

b)

Calcula los puntos de la recta $s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{2}$ que equidistan de π_1 y π_2 .

Un punto genérico de la recta s es $X(x, y, z) = (1 + 2b, 2 + 3b, 2b)$ con $b \in \mathbb{R}$.

$$\text{Tenemos: } d(X; \pi_1) = \frac{|1 + 2b + 2 + 3b + 2b|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|3 + 7b|}{\sqrt{3}}; \quad d(X; \pi_2) = \frac{|1 + 2b - 2 - 3b + 2b|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|-1 + b|}{\sqrt{3}}.$$

Igualando $d(X; \pi_1) = d(X; \pi_2)$ tenemos: $\frac{|3 + 7b|}{\sqrt{3}} = \frac{|-1 + b|}{\sqrt{3}}$, es decir $|3 + 7b| = |-1 + b|$ que nos da lugar a dos ecuaciones:

$$3 + 7b = +(-1 + b) \rightarrow 6b = -4 \rightarrow b = -2/3, \text{ y un punto } X_1 \text{ es } X_1(1+2(-2/3), 2+3(-2/3), 2(-2/3)) = X_1(-1/3, 0, -4/3).$$

$$3 + 7b = -(-1 + b) \rightarrow 8b = -2 \rightarrow b = -1/4, \text{ y un punto } X_1 \text{ es } X_1(1+2(-1/4), 2+3(-1/4), 2(-1/4)) = X_2(1/2, 5/4, -1/2).$$

Los puntos de s que equidistan de π_1 y π_2 , son $X_1(-1/3, 0, -4/3)$ y $X_2(1/2, 5/4, -1/2)$.

Opción B

Ejercicio 1 opción B, Suplente Junio 2019 (modelo 2)

[2'5 puntos] Se sabe que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 2b & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

(\ln denota la función logaritmo neperiano) es derivable. Calcula a y b .

Solución

Se sabe que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 2b & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$. (\ln denota la función logaritmo

neperiano) es derivable. Calcula a y b .

Sabemos que si una función es derivable también es continua, por tanto nuestra función f es continua y derivable en $x = 0$.

Como es continua en $x = 0$, $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - ax + 2b) = 0 - 0 + 2b = 2b.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\ln(0+1)}{0} = \frac{\ln(1)}{0} = \frac{0}{0};$$

Le aplicamos la regla de L'Hôpital (L'H): Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ y existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

La regla se puede repetir y también para $\frac{\infty}{\infty}$, y cuando $x \rightarrow \infty$.

Con lo cual tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(x+1) \cdot 1} = \frac{1}{(0+1) \cdot 1} = \frac{1}{1} = 1$$

Igualando $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, resulta $2b = 1$, de donde $b = 1/2$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 2b & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases};$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - a & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x+1} \cdot x - \ln(x+1) \cdot 1}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x - a & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Estudiaremos la continuidad de la derivada en $x = 0$, es decir $f'(0^-) = f'(0^+)$ con $f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$ y $f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$.

Empezamos $f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x - a) = 0 - a = -a$.

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2} = \frac{0 - \ln(0+1)}{0^2} = \frac{0}{0}, \text{ le aplicamos la regla de L'Hôpital}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x+1-x}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - (x+1)}{2x \cdot (x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{2x \cdot (x+1)^2} =$$

$$\stackrel{\text{Simplifico "x"}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{2 \cdot (x+1)^2} = \frac{-1}{2 \cdot (0+1)^2} = \frac{-1}{2}.$$

Igualando $f'(0^-) = f'(0^+)$, tenemos $-a = -1/2 \rightarrow a = 1/2$. Por tanto $a = 1/2$ y $b = 1/2$, para que la función dada sea derivable.

Ejercicio 2 opción B, Suplente Junio 2019 (modelo 2)

Sean $f, g: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = \text{sen}(x)$ y $g(x) = \text{sen}(2x)$.

(a) [1 punto] Esboza sus gráficas en unos mismos ejes coordenados y calcula sus puntos de corte.

(b) [1'5 puntos] Calcula el área del recinto limitado por ambas gráficas y las rectas $x = 0$ y $x = \pi/3$.

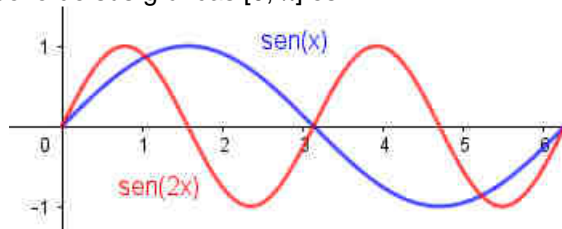
Solución

Sean $f, g: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = \text{sen}(x)$ y $g(x) = \text{sen}(2x)$.

(a) [1 punto] Esboza sus gráficas en unos mismos ejes coordenados y calcula sus puntos de corte.

Sabemos que la función sen es continua y derivable en todo \mathbb{R} , periódica de periodo 2π , $\text{sen}(0) = 0$, $\text{sen}(\pi/2) = 1$, $\text{sen}(\pi) = 0$, $\text{sen}(3\pi/2) = -1$ y $\text{sen}(2\pi) = 0$. “ sen ” creciente en el I y IV cuadrante y decreciente en el II y III cuadrante.

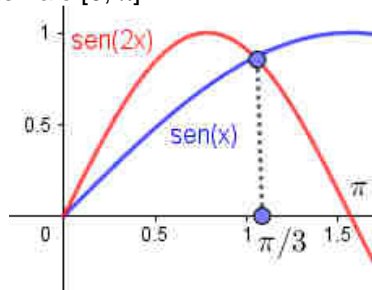
También sabemos que la gráfica de $\text{sen}(2x)$ es parecida a la de “ $\text{sen}(x)$ ” pero de periodo π , por tanto el papel que realizaban $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ y 2π en “ sen ” lo realizan ahora $0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4$ y π en “ $\text{sen}(2x)$ ”. Teniendo en cuenta todo esto un esbozo de sus gráficas $[0, \pi]$ es:



Me están pidiendo los cortes de $\text{sen}(x)$ y $\text{sen}(2x)$ en $[0, \pi]$.

De $\text{sen}(x) = \text{sen}(2x) = 2\text{sen}(x)\cos(x) \rightarrow \text{sen}(x) - 2\text{sen}(x)\cos(x) = 0 = \text{sen}(x) \cdot (1 - 2\cos(x))$. De $\text{sen}(x) = 0$ tenemos $x = 0$, y de $1 - 2\cos(x) = 0$ tenemos $\cos(x) = 1/2$, de donde $x = \pi/3$.

Volvemos a realizar la gráfica en el intervalo $[0, \pi]$.



(b)

Calcula el área del recinto limitado por ambas gráficas y las rectas $x = 0$ y $x = \pi/3$.

Nos fijamos en el último esbozo de la gráfica para calcular el área:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^{\pi/3} (\text{sen}(2x) - \text{sen}(x)) dx = [-\cos(2x)/2 + \cos(x)]_0^{\pi/3} = (-\cos(2\pi/3)/2 + \cos(\pi/3)) - (-\cos(0) + \cos(0)) \\ &= (-(-1/2)/2 + 1/2) - (-1/2 + 1) = 1/4 \text{ u}^2. \end{aligned}$$

Ejercicio 3 opción B, Suplente Junio 2019 (modelo 2)

Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} mx - y + 13z = 0 \\ 2x - my + 4z = 0 \\ x + y + 7z = 0 \end{cases}$$

a) [1'5 puntos] Encuentra los valores de “ m ” para los que el sistema tiene infinitas soluciones.

b) [1 punto] Resuelve el sistema para $m = 3$. En este caso, ¿hay alguna solución en las que $x = 10$? Razona tu respuesta.

Solución

Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} mx - y + 13z = 0 \\ 2x - my + 4z = 0 \\ x + y + 7z = 0 \end{cases}$$

a) Encuentra los valores de "m" para los que el sistema tiene infinitas soluciones.

$$\text{Matriz de los coeficientes } A = \begin{pmatrix} m & -1 & 13 \\ 2 & -m & 4 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \text{ matriz ampliada } A^* = \begin{pmatrix} m & -1 & 13 & 0 \\ 2 & -m & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como vemos es un sistema homogéneo por tanto siempre tiene la solución trivial $(x,y,z) = (0,0,0)$. Como me piden los valores de "m" para que el sistema tenga infinitas soluciones, nos piden los valores de "m" para los cuales $\det(A) = |A| = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Tenemos } \det(A) = |A| &= \begin{vmatrix} m & -1 & 13 \\ 2 & -m & 4 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \begin{array}{l} F_1+F_3 \\ \\ \end{array} = \begin{vmatrix} m+1 & 0 & 20 \\ 2 & -m & 4 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{array} \\ &= (6m + 1) \cdot (-7m - 4) - 0 + 20 \cdot (2 + m) = -7m^2 + 9m + 36. \end{aligned}$$

$$\text{De } \det(A) = 0 \rightarrow -7m^2 + 9m + 36 = 0 \rightarrow 7m^2 - 9m - 36 = 0. \quad x = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 1008}}{14} = \frac{9 \pm 33}{14}, \text{ de donde } m = 3 \text{ y } m = -12/7.$$

Si $m = 3$ y $m = -12/7$, $\det(A) = 0$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2$ (la tercera columna es de ceros) < número de incógnitas, sistema compatible e indeterminado, y tiene infinitas soluciones. Por el Teorema de Rouché.

b) Resuelve el sistema para $m = 3$. En este caso, ¿hay alguna solución en las que $x = 10$? Razona tu respuesta.

Hemos visto en el apartado (a) que si $m = 3$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 < 3 =$ número de incógnitas, *el sistema es compatible e indeterminado y tiene más de una solución.*

Por tener rango 2 utilizamos sólo dos ecuaciones (las dos últimas)

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 0 & (F_1 - 2F_2) \\ x + y + 7z = 0 \end{cases} \approx \begin{cases} -5y - 10z = 0 \\ x + y + 7z = 0 \end{cases}. \text{ Llamando } \mathbf{z} = \mathbf{m} \in \mathbb{R} \text{ tenemos } \mathbf{y} = -2\mathbf{m}. \text{ Entrando en la segunda ecuación } x - 2m + 7m = 0, \text{ de donde } \mathbf{y} = -5\mathbf{m}, \text{ y la solución del sistema es } \mathbf{(x, y, z)} = \mathbf{(-5m, -2m, m)}, \text{ con } \mathbf{m} \in \mathbb{R}.$$

Si $x = 10 = -5m$, tenemos $m = -2$, y **la solución para $x = 10$ es $(x,y,z) = (10,4,-2)$.**

Ejercicio 4 opción B, Suplente Junio 2019 (modelo 2)

Considera los puntos $A(0,3,-1)$ y $B(0,1,a)$ y el plano " π " de ecuación $x - y + z = 0$.

(a) [0'75 puntos] Determina a sabiendo que la recta que pasa por A y B es paralela al plano " π ".

(b) [0'75 puntos] Halla el punto de corte de la recta que pasa por A y es perpendicular a " π ".

(b) [1 punto] Para $a = 2$, halla el plano que contiene a los puntos A y B y es perpendicular al plano π .

Solución

Considera los puntos $A(0,3,-1)$ y $B(0,1,a)$ y el plano " π " de ecuación $x - y + z = 0$.

(a)

Determina a sabiendo que la recta que pasa por A y B es paralela al plano " π ".

Sabemos que si la recta que pasa por A y B es paralelo al plano " π ", el vector director de la recta, \mathbf{AB} , es perpendicular al vector normal del plano $\mathbf{n} = (1,-1,1)$, es decir su producto escalar (\bullet) es cero.

$\mathbf{AB} \bullet \mathbf{n} = (0,-2,a+1) \bullet (1,-1,1) = 0+2+1+a = 0$, de donde $\mathbf{a} = -3$ para que la recta y el plano sean paralelos.

(b)

Halla el punto de corte de la recta que pasa por A y es perpendicular a " π ".

Me están pidiendo la proyección ortogonal M de A sobre " π ", para lo cual obtenemos el plano " r " perpendicular al plano " π " por el punto A, el vector director de la perpendicular \mathbf{v} coincide con el vector normal del plano \mathbf{n} , es decir $\mathbf{v} = \mathbf{n} = (1,-1,1)$. Después sustituiremos la recta en el plano y obtendremos el punto M pedido.

$$\text{La recta es } s \equiv \begin{cases} x = b \\ y = 3 - b \\ z = -1 + b \end{cases} \text{ con } b \in \mathbb{R}.$$

Sustituyendo "s" en " π " tenemos: $b - 3 + b - 1 + b = 0 \rightarrow 3b - 4 = 0 \rightarrow b = 4/3$, y **el punto proyección M pedido es: $M(4/3, 3 - (4/3), -1 + (4/3)) = M(4/3, 5/3, 1/3)$.**

(b)

Para $a = 2$, halla el plano que contiene a los puntos A y B y es perpendicular al plano π .

Para un plano necesitamos un punto, el $A(0,3,-1)$, y dos vectores linealmente independientes el $\mathbf{AB}=(0,-2,3)$ y el $\mathbf{n} = (1,-1,1)$ pues tiene una dirección al plano π .

El plano pedido en su ecuación vectorial es: $\pi_1 \equiv \mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{AB} + \mu \mathbf{n}$, es decir:

$\pi_1 \equiv (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (0, 3, -1) + \lambda(0, -2, 3) + \mu(1, -1, 1)$ con λ y μ números reales.